Primjena AG-nejednakosti u planimetriji

Ilija Ilišević*

Sažetak. *Razmatraju se primjene AG-nejednakosti u planimetriji, koje su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka prilagođenih učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *AG-nejednakost, planimetrija*

Applications of AG inequality in planimetry

Abstract. *Applications of AG-inequality in planimetry are considered. These applications are illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

Key words: *AG-inequality, planimetry*

Neka je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-torka nenegativnih realnih brojeva. Tada su aritmetička i geometrijska sredina n-torke a definirane redom s

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \qquad G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Vrijedi:

$$A_n(a) \geq G_n(a).$$

Pritom jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Nejednakost $A_n(a) \geq G_n(a)$ nazivamo aritmetičko-geometrijska ili kraće AG-nejednakost. Dokaz te nejednakosti može se primjerice vidjeti u [6].

Primijenit ćemo ovu nejednakost na nekoliko zadataka iz planimetrije.

Zadatak 1. *Dokažite da za pravokutni trokut vrijedi*

$$2r + c \geq 2\sqrt{ab},$$

gdje su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a r polumjer trokutu upisane kružnice.

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, a kako za pravokutni trokut vrijedi $2r + c = a + b$, to je $2r + c \geq 2\sqrt{ab}$. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = b$, tj. ako je pravokutni trokut jednakokračan.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Zadatak 2. *Dokažite da za pravokutni trokut vrijedi*

$$R + r \geq \sqrt{2P},$$

gdje je P površina trokuta, a R i r polumjeri trokutu opisane i upisane kružnice, redom.
Rješenje. Vrijedi

$$R + r = \frac{c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, to je

$$R + r \geq \sqrt{ab} = \sqrt{2P}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = b$, tj. ako je pravokutni trokut jednakokračan.

Zadatak 3. *Dokažite da za pravokutni trokut vrijedi*

$$\frac{c(a+b)}{P} \geq 4\sqrt{2}.$$

Rješenje. Redom imamo sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\begin{aligned}
\frac{c(a+b)}{P} &\geq 4\sqrt{2}, \\
\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,(a+b)}{ab} &\geq 2\sqrt{2}, \\
\frac{(a^2+b^2)(a^2+2ab+b^2)}{a^2b^2} &\geq 8, \\
\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(a^2+2ab+b^2) &\geq 8, \\
1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} + \frac{b^2}{a^2} + 1 &\geq 8, \\
\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) &\geq 6.
\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost je točna jer je prema AG-nejednakosti

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2 \quad \text{i} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, odnosno $a = b$, tj. za jednakokračno pravokutni trokut.

Zadatak 4. *Odredite koji od pravokutnih trokuta s danom duljinom hipotenuze ima najveću površinu.*
Rješenje. Iz $P = \dfrac{ab}{2}$ i $c^2 = a^2 + b^2$ slijedi

$$P = \frac{\sqrt{a^2(c^2 - a^2)}}{2}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\sqrt{a^2(c^2 - a^2)} \leq \frac{a^2 + (c^2 - a^2)}{2} = \frac{c^2}{2},$$

to je $P_{max} = \frac{c^2}{4}$ i dostiže se za $a^2 = c^2 - a^2$, tj. $a = \frac{c\sqrt{2}}{2} = b$.

Zadatak 5. *Od svih pravokutnih trokuta danog opsega $2s$, odredite onaj koji ima najveću površinu.*
Rješenje. Iz $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 2s$ slijedi

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2s - (a + b).$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo

$$\frac{ab}{2} = s^2 - sc,$$

odnosno

$$P = s^2 - sc.$$

Površina je maksimalna kada je c minimalno. Kako je prema AG-nejednakosti $a^2 + b^2 \geq 2ab$, to je

$$2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2,$$

tj. $2c^2 \geq (a + b)^2$. Odatle slijedi

$$c \geq \frac{a + b}{\sqrt{2}} = \frac{2s - c}{\sqrt{2}},$$

pa je

$$c \geq \frac{2s}{\sqrt{2} + 1}.$$

Jednakost vrijedi za $a = b$ i tada je $c = \frac{2s}{\sqrt{2}+1}$ minimalno, a

$$P_{max} = s^2 - \frac{2s^2}{\sqrt{2} + 1} = (3 - 2\sqrt{2})s^2.$$

Dakle, najveću površinu ima jednakokračno pravokutni trokut.

Zadatak 6. *Koji trokut danog opsega $2s$ ima najveću površinu?*
Rješenje. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta kojemu je opseg $2s$. Kako je prema Heronovoj formuli

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)},$$

to je površina maksimalna kada je $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ maksimalno. Prema AG-nejednakosti je

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3},$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)} &\leq \sqrt{\left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3} \\ &= \sqrt{\left(\frac{s}{3}\right)^3} = \frac{s\sqrt{3s}}{9}. \end{aligned}$$

Maksimum se dostiže kada vrijedi jednakost, a to je onda i samo onda ako je

$$s-a = s-b = s-c, \quad \text{tj.} \quad a = b = c.$$

Dakle, najveću površinu ima jednakostranični trokut. Ta površina iznosi

$$P_{max} = \sqrt{s} \cdot \frac{s\sqrt{3s}}{9} = \frac{s^2\sqrt{3}}{9}.$$

Zadatak 7. *Dokažite da za svaki trokut vrijedi nejednakost*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3},$$

gdje su a, b, c duljine stranica, a P površina trokuta.
Rješenje. Heronovu formulu zapišemo u obliku

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\begin{aligned} &(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \\ \leq\ &\left(\frac{(a+b-c)+(a+c-b)+(b+c-a)}{3}\right)^3 \\ =\ &\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3, \end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned}4P &\le \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}\\ &= \frac{3(a^2+b^2+c^2)-\big((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big)}{3\sqrt{3}}\\ &\le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{3\sqrt{3}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Odatle slijedi $a^2+b^2+c^2 \ge 4P\sqrt{3}$. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a=b=c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 8. *Kakav je trokut ABC ako je*

$$R(b+c) = a\sqrt{bc},$$

gdje su a,b,c duljine stranica, a R polumjer trokutu opisane kružnice.
Rješenje. Iz danog uvjeta slijedi

$$\frac{a}{2R} = \frac{b+c}{2\sqrt{bc}}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti $b+c \ge 2\sqrt{bc}$, to je

$$\frac{b+c}{2\sqrt{bc}} \ge 1,$$

pa je

$$\frac{a}{2R} \ge 1.$$

Slijedi $a=2R$, pa je trokut pravokutan s hipotenuzom a. No, tada je $b+c=2\sqrt{bc}$, a to vrijedi onda i samo onda ako je $b=c$. Dakle, trokut ABC je jednakokračno pravokutni s pravim kutom u vrhu A.

Zadatak 9. *Neka su a,b,c duljine stranica trokuta. Dokažite da vrijedi*

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}.$$

Rješenje. Danu nejednakost možemo zapisati, redom, u ekvivalentnom obliku

$$\frac{|ac^2+b^2c+a^2b-bc^2-a^2c-ab^2|}{(a+b)(b+c)(c+a)} < \frac{1}{8},$$

$$\frac{|(a-b)(b-c)(a-c)|}{(a+b)(b+c)(c+a)} < \frac{1}{8}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c+a \geq 2\sqrt{ac},$$

to je

$$\begin{aligned}\frac{|(a-b)(b-c)(a-c)|}{(a+b)(b+c)(c+a)} &\leq \frac{|(a-b)(b-c)(a-c)|}{8abc}\\ &= \frac{|a-b|\cdot|b-c|\cdot|c-a|}{8abc}\\ &< \frac{abc}{8abc} = \frac{1}{8},\end{aligned}$$

pri čemu zadnja nejednakost slijedi iz nejednakosti trokuta.

Zadatak 10. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Rješenje. Uvedimo zamjenu:

$$x = \frac{b+c-a}{2} > 0, \quad y = \frac{c+a-b}{2} > 0, \quad z = \frac{a+b-c}{2} > 0.$$

Tada je

$$a = y+z, \quad b = z+x, \quad c = x+y,$$

pa nejednakost prelazi redom u ekvivalentne,

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3,$$

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6,$$

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6,$$

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 6.$$

Ova nejednakost je točna, jer je prema AG-nejednakosti

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2,$$

pa je točna i polazna nejednakost. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $x = y = z$, a to je onda i samo onda ako je $a = b = c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 11. *Neka su v_a, v_b, v_c duljine visina, a r polumjer trokutu upisane kružnice. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$v_a + v_b + v_c \geq 9r.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$v_a = \frac{2P}{a}, \quad v_b = \frac{2P}{b}, \quad v_c = \frac{2P}{c}, \quad r = \frac{P}{s},$$

gdje je P površina, a s poluopseg trokuta. Tada nejednakost koju treba dokazati prelazi redom u ekvivalentne:

$$\frac{2P}{a} + \frac{2P}{b} + \frac{2P}{c} \geq \frac{9P}{s},$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{2s},$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Dokažimo posljednju nejednakost.

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \\ &\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9,\end{aligned}$$

jer je prema AG-nejednakosti

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2, \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, $\frac{a}{c} = \frac{c}{a}$, $\frac{b}{c} = \frac{c}{b}$, tj. za $a = b = c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 12. *Dokažite da za trokut ABC vrijedi nejednakost*

$$\sqrt[3]{\frac{R}{2P^2}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}\right),$$

gdje su v_a, v_b, v_c duljine visina, P površina trokuta, a R polumjer trokutu opisane kružnice.

Rješenje. Vrijedi:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2P} + \frac{b}{2P} + \frac{c}{2P}\right).$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2P}+\frac{b}{2P}+\frac{c}{2P}\right) &\geq \sqrt[3]{\frac{a}{2P}\cdot\frac{b}{2P}\cdot\frac{c}{2P}}=\sqrt[3]{\frac{abc}{8P^3}}\\ &= \sqrt[3]{\frac{4RP}{8P^3}}=\sqrt[3]{\frac{R}{2P^2}},\end{aligned}$$

to je

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{v_a}+\frac{1}{v_b}+\frac{1}{v_c}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{R}{2P^2}}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a=b=c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 13. *Dokažite da za trokut ABC vrijedi nejednakost*

$$v_a\leq\sqrt{s(s-a)},$$

gdje je a duljina stranice, s poluopseg, a v_a duljina visine povučene na stranicu a.

Rješenje. Nejednakost koju treba dokazati redom prelazi u sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\begin{aligned}\frac{2P}{a} &\leq \sqrt{s(s-a)},\\ \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} &\leq \sqrt{s(s-a)},\\ \frac{2\sqrt{(s-b)(s-c)}}{a} &\leq 1,\\ \sqrt{(s-b)(s-c)} &\leq \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\begin{aligned}\sqrt{(s-b)(s-c)} &\leq \frac{(s-b)+(s-c)}{2}=\frac{2s-(b+c)}{2}\\ &= \frac{2s-(2s-a)}{2}=\frac{a}{2},\end{aligned}$$

to je točna i nejednakost koju je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $b=c$, tj. za jednakokračan trokut s osnovicom a.

Zadatak 14. *Dokažite da za trokut ABC vrijedi nejednakost*

$$t_a\geq\frac{1}{2}\sqrt{a(8s-9a)},$$

gdje je a duljina stranice, s poluopseg, a t_a duljina težišnice povučene na stranicu a.

Rješenje. Nejednakost koju treba dokazati redom prelazi u sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} &\geq \frac{1}{2}\sqrt{a(8s-9a)},\\
\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} &\geq \sqrt{a(8s-9a)},\\
2b^2+2c^2-a^2 &\geq a(8s-9a),\\
2b^2+2c^2-a^2 &\geq a\big(4(a+b+c)-9a\big),\\
2b^2+2c^2-a^2 &\geq a\big(4b+4c-5a\big),\\
2b^2+2c^2-a^2 &\geq 4ab+4ac-5a^2,\\
2b^2+2c^2+4a^2 &\geq 4ab+4ac,\\
b^2+c^2+2a^2 &\geq 2ab+2ac,\\
(a^2+b^2)+(a^2+c^2) &\geq 2ab+2ac.
\end{aligned}
$$

Kako je prema AG-nejednakosti $a^2+b^2 \geq 2ab$ i $a^2+c^2 \geq 2ac$, to je posljednja nejednakost točna, pa je točna i nejednakost koju je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a=b=c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 15. *Neka su t_a, t_b, t_c duljine težišnica povučene na stranice trokuta kojima su duljine a, b, c, redom. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{t_a^2}{a^2}+\frac{t_b^2}{b^2}+\frac{t_c^2}{c^2} \geq \frac{9}{4}.$$

Rješenje. Imamo

$$
\begin{aligned}
& \frac{t_a^2}{a^2}+\frac{t_b^2}{b^2}+\frac{t_c^2}{c^2}\\
= \;& \frac{\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)}{a^2}+\frac{\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2)}{b^2}+\frac{\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)}{c^2}\\
= \;& \frac{1}{4}\Big(\frac{2b^2}{a^2}+\frac{2c^2}{a^2}-1+\frac{2a^2}{b^2}+\frac{2c^2}{b^2}-1+\frac{2a^2}{c^2}+\frac{2b^2}{c^2}-1\Big)\\
= \;& \frac{1}{4}\left(2\Big(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\Big)+2\Big(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\Big)+2\Big(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\Big)-3\right).
\end{aligned}
$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2} \geq 2, \quad \frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq 2, \quad \frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2} \geq 2,$$

to je

$$\frac{t_a^2}{a^2}+\frac{t_b^2}{b^2}+\frac{t_c^2}{c^2} \geq \frac{1}{4}(2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 2-3)=\frac{9}{4}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a=b=c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 16. *Opseg kružnog isječka je a. Koliki mora biti polumjer r da bi površina isječka bila maksimalna i kolika je ta površina?*
Rješenje. Iz $l + 2r = a$ slijedi $l = a - 2r$, pa je površina isječka

$$P_{ki} = \frac{lr}{2} = \frac{(a-2r)r}{2} = \frac{1}{4}(a-2r)2r.$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$(a-2r)2r \leq \left(\frac{(a-2r)+2r}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

to je

$$P_{ki} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{16}.$$

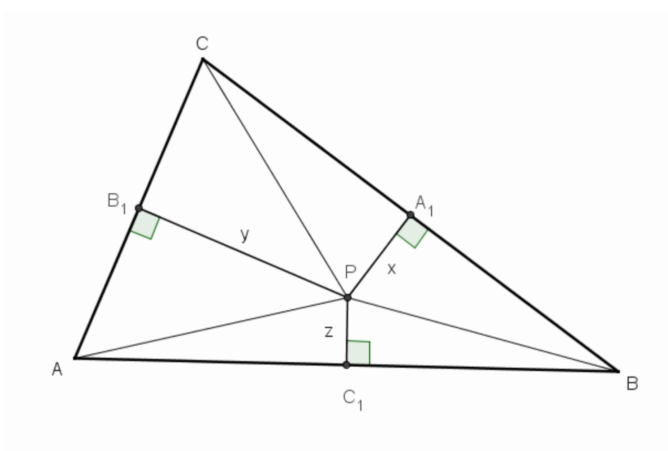
Jednakost (a time i maksimum) vrijedi za $a - 2r = 2r$, tj. za $r = \frac{a}{4}$. Dakle, površina isječka je maksimalna za $r = \frac{a}{4}$ i iznosi $\frac{a^2}{16}$.

Zadatak 17. *Iz točke P unutar trokuta ABC povučene su okomice PA_1, PB_1, PC_1 na pravce BC, CA, AB redom. Odredite položaj točke P tako da zbroj*

$$S = \frac{a}{|PA_1|} + \frac{b}{|PB_1|} + \frac{c}{|PC_1|}$$

bude minimalan i odredite tu minimalnu vrijednost.
Rješenje. Označimo kao na *Slici 1.* s $x = |PA_1|$, $y = |PB_1|$, $z = |PC_1|$. Tada je

$$S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$



Slika 1. Trokut ABC iz Zadatka 17.

Kako je

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(BCP) + P(CAP) + P(ABP) \\ &= \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} \\ &= \frac{1}{2}(ax + by + cz), \end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned} 2P(ABC) \cdot S &= \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)(ax + by + cz) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + ac\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + bc\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right). \end{aligned}$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2,$$

pa je

$$\begin{aligned} 2P(ABC) \cdot S &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$S \geq \frac{(a + b + c)^2}{2P(ABC)}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $x = y = z$. Tada je P središte trokutu ABC upisane kružnice, a

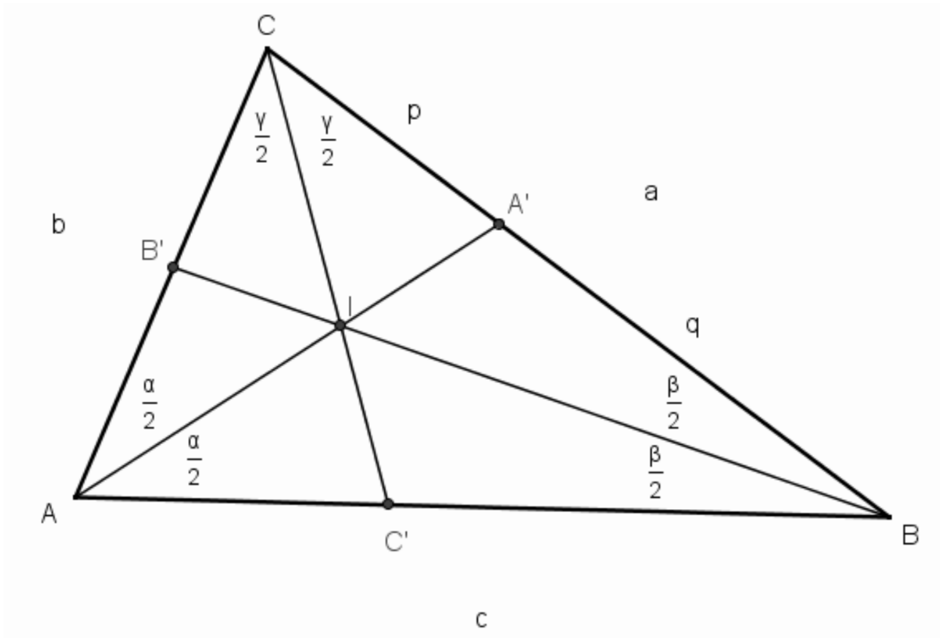
$$S_{min} = \frac{(a + b + c)^2}{2P(ABC)}.$$

Zadatak 18. *Dan je trokut ABC. Neka su A', B', C' točke presjeka simetrala kutova CAB, ABC, BCA, redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, a I je središte upisane mu kružnice. Dokažite da je*

$$\frac{1}{4} < \frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} \leq \frac{8}{27}.$$

Rješenje. Neka je kao na *Slici 2.*, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ te neka je $p = |CA'|$ i $q = |A'B|$. Prema poučku o simetrali kuta je $p : q = b : c$, a odatle prema pravilu o razmjeru slijedi $p : (p + q) = b : (b + c)$, tj.

$$p = \frac{ab}{b + c}.$$



Slika 1. Trokut ABC iz Zadatka 18.

Analogno dobivamo

$$q = \frac{ac}{b+c}.$$

Primjenjujući poučak o simetrali kuta na trokut $AA'C$ dobivamo

$$|AI| : |IA'| = b : p,$$

odakle je prema pravilu o razmjeru

$$|AI| : (|AI| + |IA'|) = b : (b+p),$$

tj.

$$\begin{aligned}\frac{|AI|}{|AI| + |IA'|} &= \frac{b}{b+p} = \frac{b}{b + \frac{ab}{b+c}} \\ &= \frac{b}{b(1 + \frac{a}{b+c})} = \frac{1}{1 + \frac{a}{b+c}} = \frac{b+c}{a+b+c},\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{|AI|}{|AA'|} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Analogno,

$$\frac{|BI|}{|BB'|} = \frac{a+c}{a+b+c}, \quad \frac{|CI|}{|CC'|} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\frac{|AI|\cdot|BI|\cdot|CI|}{|AA'|\cdot|BB'|\cdot|CC'|} &= \frac{|AI|}{|AA'|}\cdot\frac{|BI|}{|BB'|}\cdot\frac{|CI|}{|CC'|}\\ &= \frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{a+c}{a+b+c}\cdot\frac{a+b}{a+b+c}\\ &= \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+b+c)^3}.\end{aligned}$$

Dokažimo najprije desnu nejednakost. Kako je prema AG-nejednakosti

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c)(b+c) &\leq \left(\frac{(a+b)+(a+c)+(b+c)}{3}\right)^3\\ &= \left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}(a+b+c)^3,\end{aligned}$$

to je

$$\frac{|AI|\cdot|BI|\cdot|CI|}{|AA'|\cdot|BB'|\cdot|CC'|} \leq \frac{8}{27}.$$

Sada dokažimo lijevu nejednakost. Imamo

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a+b+c} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2a+2b}{a+b+c}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(a+b+c)+(a+b-c)}{a+b+c}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{a+b-c}{a+b+c}\right)\end{aligned}$$

i analogno

$$\frac{a+c}{a+b+c} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a+c-b}{a+b+c}\right),$$
$$\frac{b+c}{a+b+c} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{b+c-a}{a+b+c}\right).$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\frac{|AI|\cdot|BI|\cdot|CI|}{|AA'|\cdot|BB'|\cdot|CC'|} &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{a+b-c}{a+b+c}\right)\left(1+\frac{a+c-b}{a+b+c}\right)\left(1+\frac{b+c-a}{a+b+c}\right)\\ &> \frac{1}{8}\left(1+\frac{a+b-c}{a+b+c}+\frac{a+c-b}{a+b+c}+\frac{b+c-a}{a+b+c}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{a+b-c+a+c-b+b+c-a}{a+b+c}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{a+b+c}{a+b+c}\right) = \frac{1}{8}\cdot(1+1) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{|AI|\cdot|BI|\cdot|CI|}{|AA'|\cdot|BB'|\cdot|CC'|} > \frac{1}{4}.$$

Literatura

[1] D. Bonifert, *Nehány tipikus problémaszituáció matematikából*, Mozaik, Szeged, 1994.

[2] L. Bőrcsők, *Érettségi, felvételi feladatok*, Matematika, Szukits Könyvkiado, Szeged, 1999.

[3] Dr. L. Gerőcs, *Irány az egyetem 1993*, Nemzeti Tankőnyvkiado, 1993.

[4] Ž. Hanjš, *Međunarodne matematičke olimpijade*, Element, Zagreb, 1997.

[5] I. Ilišević, *Nejednakosti u pravokutnom trokutu*, Bilten seminara za nastavnike-mentore 7 (1998), 79–81.

[6] B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, *Male teme iz matematike*, HMD i Element, Zagreb, 1994.

[7] I.H. Šivaniskij, *Posobie po matematike dlja tehnikumov*, Viššaja škola, Moskva, 1970.